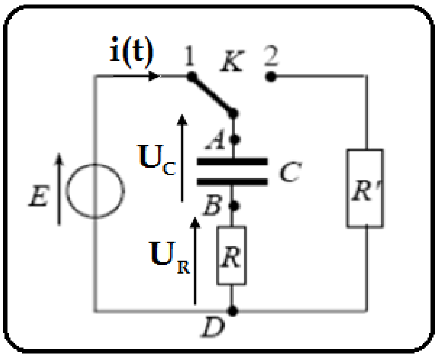
حل السلسلة الأولى في الوحدة الثالثة

حل التمرين الأول

1ـ جهة التيار و كذلك جهة الجهود $u_R ; u_C$:



2ـ أـ عبارة كل من $u_R ; u_C$ بدلالة $q = q_A$

نعلم أن :
$$\begin{cases} U_R(t) = R.i(t) = R.\dfrac{dq}{dt} \\ U_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} \end{cases}$$

ب – إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحققها $q(t)$

ـ باستعمال قانون جمع التوترات: $E = U_R + U_C$

$$E = R.i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

بضرب طرفي المعادلة في سعة المكثفة C نجد :

$$C.E = C.R.i(t) + C.\frac{q(t)}{C}$$

$$C.E = \tau.\frac{dq}{dt} + q(t)$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q(t) = \frac{E}{R}}$$

جـ لنعبر عن A و α بدلالة $C;E;R$:

$$q = A\left(1 - e^{-\alpha.t}\right) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = A.\alpha.e^{-\alpha.t}$$

$$C.E = R.C.A.\alpha.e^{-\alpha.t} + A\left(1 - e^{-\alpha.t}\right) = A + A(RC\alpha - 1)e^{-\alpha.t}$$

إذن: $A = C.E = Q_0$

$$RC\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

إذن: $\boxed{q(t)=Q_0\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}.t}\right)}$

د-إستنتاج E :

$$U_C(t)=\frac{q(t)}{C}\Rightarrow U_C(t)=\frac{Q_0}{C}\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}.t}\right)$$

$$U_C(t\to\infty)=\frac{\cancel{C}.E}{\cancel{C}}(1-0)=5V$$

$$\boxed{E=5V}$$

ه – إستنتاج سعة المكثفة:

$$E_C(t)=\frac{1}{2}.C.U_C^2(t)$$

$$E_C(t\to\infty)=\frac{1}{2}.C.E^2\Rightarrow C=\frac{2.E_C}{E^2}=\frac{2.5.10^{-3}}{5^2}=4.10^{-4}F$$

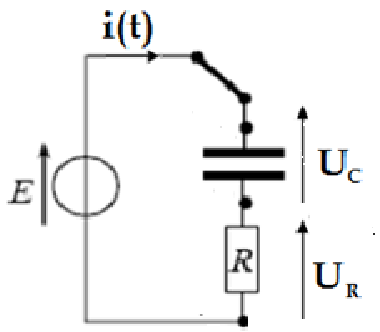
$$\boxed{C=4.10^{-4}F}$$

2-أ-تتفرغ المكثفة عبر: $R+R'$

ب- $\begin{cases}\tau_1=R.C\\ \tau_2=(R+R').C\end{cases}\Rightarrow\tau_2\succ\tau_1$

حل التمرين الثاني:

1-إيجاد المعادلة التفاضلية:



$$E=U_R+U_C$$

$$\begin{cases}U_R(t)=R.i(t)=R.\frac{dq}{dt}\\ q(t)=CU_C(t)\end{cases}$$

$$E=U_R+U_C=U_R+R.\frac{dq}{dt}=U_R+R.C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{R.C}U_R=\frac{E}{R.C}}\text{.............}(1)$$

2-لنتحقق أن المعادلة التفاضلية المحصل عليها تقبل العبارة $u_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$ كحل لها.

$$\frac{dU_C}{dt}=\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\text{........}(2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد: $\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}+E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)=\frac{E}{R.C}$

3ـوحدة $R.C$:

باستعمال طريقة التحليل البعدي:

$$[R.C]=[R].[C]=\frac{[\cancel{U}]}{[i]}.\frac{[q]}{[\cancel{U}]}=\frac{[q]}{[i]}=\frac{[\cancel{i}][t]}{[\cancel{i}]}=[t]$$

$$[R.C]=[t]=T\,(s)$$

إذن وحدة $R.C$ هي الزمن (s) .

ـمدلوله العلمي:

لدينا : $u_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$

لما : $t=R.C\rightarrow U_C\left(R.C\right)=E\left(1-e^{\left(-\frac{R.C}{R.C}\right)}\right)=E\left(1-e^{(-1)}\right)=0,63E$

إذن عند $t=R.C$ تكون المكثفة قد شحنت بنسبة 63% .

4ـإكمال الجدول 5ـرسم البيان .

6ـعبارة التيار:

$$i\,(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d\left(C.U_C\right)}{dt}=C\,\frac{dU_C}{dt}$$

$$i\,(t)=\frac{\cancel{C}.E}{R.\cancel{C}}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}=\frac{E}{R}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}=I_0e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}$$

$$\boxed{i\,(t)=I_0e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}}$$

7ـعبارة الطاقة المخزنة في المكثفة:

$$E_C\,(t)=\frac{1}{2}C.U_C^2\,(t)=\frac{1}{2}C.E^2\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)^2$$

$$E_C\,(t\rightarrow\infty)=\frac{1}{2}C.E^2=\frac{1}{2}1,2.10^{-6}.6^2=2,16.10^{-5}\,J$$

حل التمرين الثالث:

1ـشدة التيار المار في الدارة :

باستعمال قانون جمع الجهود : $E=U_R+U_C$

عند $\Delta t=15s$ يكون : $E=U_C=5V$

إذن $E=U_C+Ri\Rightarrow i\left(15s\right)=0$

2ـالعبارة الحرفية لثابت الزمن τ :

$$\tau=R.C$$

τ له بعد زمني:

$$[\tau]=[R.C]=[R].[C]=\frac{[\cancel{U}]}{[i]}.\frac{[q]}{[\cancel{U}]}=\frac{[q]}{[i]}=\frac{[\cancel{i}][t]}{[\cancel{i}]}=[t]$$

$$[R.C]=[t]=T\,(s)$$

3ـتعيين قيمة τ :

من البيان $U_C = f(t)$ نجد $\tau = 2,5s$

$$\tau = R.C \Rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{2,5}{10^4} = 2,5.10^{-4}F$$

4ـأـعبارة $i(t)$ بدلالة $q(t)$: $i(t) = \frac{dq}{dt}$

بـعبارة $U_C(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$q(t) = CU_C(t) \Rightarrow U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

ج –باستعمال قانون جمع الجهود :

$$E = U_R + U_C$$

$$\begin{cases} U_R(t) = R.i(t) \\ q(t) = CU_C(t) \end{cases}$$

$$E = U_R + U_C = U_R + R.\frac{dq}{dt} = U_R + R.C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R.C}U_R = \frac{E}{R.C}}$$

5ـالعبارة الحرفية لـ : A

$A = R.C$ مدلوله : ثابت زمني يميز الدارة (R,C)